CLASE 1
MODELOS MATEMÁTICOS

1.1. Diferentes tipos de modelos. La publicación A*nálisis de modelos matemáticos aplicados en las ciencias agrarias* habla de modelos mentales, verbales, matemáticos y gráficos.

Mental
Modelos Verbal
Explícito Gráfico
Físico
Matemático

1.2. Modelos matemáticos. Los elementos constitutivos de los modelos matemáticos son:

- Variables
- Parámetros
- Relaciones funcionales
- zona de definición

1.3. Características de los modelos matemáticos usados en agronomía.

- suavidad
- funciones continuas
- dominios cerrados y acotados
- recorrido en el primer cuadrante

1.4. Usos y aplicaciones de estos conceptos. Descripción, Comprensión y Predicción de fenómenos. Los conceptos mencionados tienen aplicación en diferentes campos como biología, fertilización de suelos y economía. En fertilización de suelos y cultivos los modelos más usados son los polinomiales y del tipo Mitscherlich. En crecimiento de vegetales y animales las funciones del tipo exponencial como la logística, han demostrados ser las útiles. En crecimiento de bacterias generalmente se encuentra crecimiento logarítmico. En economía se encuentran funciones muy interesantes y lo veremos con un poco mas de detalle.

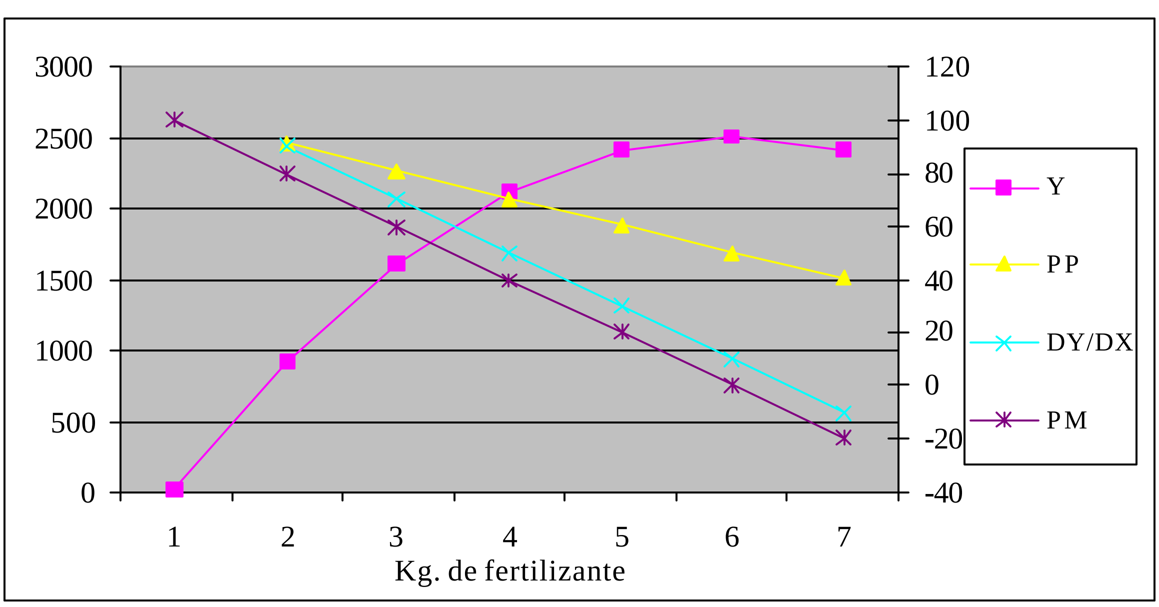
Función de respuesta a un insumo: Si tenemos Y= f(X_1,...,X_n) que representa una función de respuesta a una serie de insumos (Y es el producto; X_1, ... , X_n son los insumos). Conviene comenzar a estudiar la función de respuesta a un solo insumo como opción inicial, por su simplicidad. Supongamos para fijar ideas que estamos estudiando la respuesta en producción de maíz a la fertilización con nitrógeno. Algunos conceptos que aparecen son el producto medio y el producto marginal. El producto medio o promedio es la cantidad de producto que se obtiene por unidad de insumo, o sea los kilos de maíz que obtenemos divididos los kilos de fertilizante nitrogenado agregado: PP= Y/X. El producto marginal es la cantidad de producto que se obtiene por unidad de insumo adicional que se incorpore al sistema a partir de un momento. En nuestro ejemplo, los kilos de maíz que obtenemos por cada kilo de fertilizante nitrogenado agregado a partir de 100. Se puede demostrar que el producto marginal es la derivada de la función de producción con respecto al insumo: PM= dY/dX.

En base a estos conceptos, los economistas han definido tres regiones en la función de respuesta:
I. PM>PP. En la primer región, el producto marginal aumenta, al productor le conviene seguir agregando.
II. En la segunda región la producción continúa aumentando pero a un ritmo decreciente: PP ≥ PM>0.
III. En la tercer zona, la producción comienza a disminuir por exceso de fertilizante: PM<0.
Las zonas I y III son zonas de producción absurda, mientras que la zona II es de producción racional. O sea el productor tiene que moverse en la zona II para tomar decisiones racionales.

Ejemplo de fertilización
X es la cantidad de fertilizante
Y es la producción de maíz
PP es la producción promedio=Y/X
ΔY/ΔX es el cociente incremental
PM es la producción marginal (la derivada)
Estamos suponiendo que la función de producción es $Y=10+100X-X^2$
Por lo tanto la derivada es Y' =100-2X

X	Y	PP	ΔY/ΔX	PM	Producto	Costo	Rel P/C
0	10			100	200	0	∞
10	910	91,00	90	80	18200	100	182,0
20	1610	80,50	70	60	32200	200	161,0
30	2110	70,33	50	40	42200	300	140,7
40	2410	60,25	30	20	48200	400	120,5
50	2510	50,20	10	0	50200	500	100,4
60	2410	40,17	-10	-20	48200	600	80,3

En las tres últimas columnas tenemos lo que valdría el producto si el precio fuera de 20 y lo que costaría el fertilizante si el precio fuera de 10. Finalmente, en la última columna tenemos la relación entre el producto y el costo en esas condiciones. Más adelante veremos que la situación óptima es cuando la derivada iguala la relación de precios.



Laboratorio 1. Modelos matemáticos.

Ejercicio 1.

En un estudio conducente a estudiar la respuesta en rendimiento de una variedad de maíz (Zea Mays L.) al agregado de distintas dosis de nitrógeno (0, 50, 100, 150, 200, 250 y 300 kg/ha) se obtuvieron los siguientes valores experimentales:

Dosis de Nitrógeno (kg/ha)	Rendimiento de maíz (ton/ha)
0	4.5
50	6.9
100	9.1
150	9.5
200	9.9
250	9.8
300	9.7

Utilizando esos datos:

1. Escriba el modelo polinomial lineal correspondiente.
2. Con los mismos valores experimentales se ajustó el modelo cuadrático
   $Y=4.69+0.05N-0.000114N^2$
3. Con los mismos valores se ajustóel modelo logístico $Y= \dfrac{9.9}{1+0.8e^{-0.01N}}$

Obtenga los valores funcionales para x=0, x=100 y x=300.

Ejercicio 2.

Grafique en pares de ejes cada una de las funciones e interprete cada uno de los modelos.

i- Comente las relaciones planteadas en cada gráfica.
ii- Señale mediante letras los puntos criticos de cada una de las gráficas.

Ejercicio 3.

Las graficas representan crecimiento de 2 razas vacunas A y b en diferentes situaciones de manejo (i, ii, iii y iv). En cada gráfica la variable independiente representa tiempo (t) y la variable dependiente peso (P).

Ejercicio 4.

Identifique las siguientes ecuaciones:

Curva de Gompertz
Curva exponencial
Curva geométrica
Curva de Gompertz modificada
Curva geométrica modificada
Curva exponencial modificada
Hipérbola
Curva logística

Ejercicio 5.

Dada la siguiente función de producción: $P=f(n,l,d \mid ad,pa)$ donde:

- p es la producción en kg/há
- n es el agregado de nutrientes
- l es la cantidad de horas luz en el primer mes del cultivo
- d es la densidad de siembra
- ad es el agua disponible
- pa es la profundidad de arada

Se pide expresar verbalmente el modelo.

Ejercicio 6.

Dadas las funciones de respuesta:

$$Y_1= 527,47- 282,82\, X + 64,38\, X^2 - 4,60\, X^3$$
$$Y_2=430,23 - 320,45\, X + 52,02\, X^2$$

Con X = (3,4,5,6,7,8), donde Y_1 y Y_2 es la utilidad monetaria y X es la carga animal (ovinos por hectarea). Se pide indicar cuales son:

i. Las variables
ii. Los parámetros
iii. El dominio de variación de las funciones
iv. Las relaciones funcionales involucradas, considerando cada variable por separado
v. Comprobar ambas funciones indicando similitudes y diferencias.

Ejercicio 7.

Dadas las funciones de producción:

$P_1 = 0,05\, N + 1,20\, H_2O$
$P_2 = 0,75\, N - 1,20\, H_2O$
Con $10 \leq N \leq 100$ y $120 \leq H_2O \leq 200$ donde:

- P_1 y P_2ioson las producciones obtenidas
- N es el agregado de nutrientes minerales

- H_2O es la precipitación pluvial.

Indicar los elementos citados en el ejercicio anterior.
Comparar y discutir la forma como se indicó la zona de definición de los modelos matemáticos en los ejercicios 6 y 7.

CUESTIONARIO.

1. Qué es un modelo?
2. Proporcione ejemplos.
3. El texto habla de diferentes tipos de modelos . Cuántos hay según el texto?
4. Proporcione ejemplos diferentes a los del texto.
5. El texto menciona dos tipos de modelos como los de “caja negra” y “caja blanca” , describalos y proporcione ejemplos.
6. Los modelos matemáticos tienen cuatro elementos cuales son?
7. Como describe la diferencia entre el concepto de “parámetro” como se usa acá y como se usó en Estadistica Descriptiva?
8. Las utilidades de los modelos matemáticos son: describir, comprender y predecir. Proporcione ejemplos.

.

CLASE 2
REPASO DE FUNCIONES

2.1. Conceptos de funciones. Podemos manejar dos niveles en el estudio de funciones. Supongamos que tenemos la expresión $Y = 2X$. Si variamos el valor de X vamos a tener diferentes valores de Y. Podemos decir por tanto que el valor de Y depende del valor de X. Llamamos entonces a X *variable independiente* y a Y *variable dependiente* o *función*. Notemos que podemos considerar $X=Y/2$ y en este contexto declarar a Y variable independiente y X función de Y.
Los matemáticos les van a decir que “Una función es una correspondencia entre elementos de dos conjuntos”. ¿Cómo sé yo que elemento de Y corresponde con X=1? Multiplico el valor de X por 2: Y(X=1)= 2(1)=2. ¿Para X=2? Y=2(2)=4. ¿Para X=3? Y=2(3)=6. Entonces Y=2X es una expresión (una regla) que me permite adjudicarle valores a Y a partir de los valores conocidos de X. Esa regla de correspondencia es la función. También se usa la palabra función para nombrar a la variable dependiente y, decimos que Y es función de X.

2.2. Existencia, ceros, límites, continuidad. En matemáticas es muy usual insistir en el estudio de existencia, ceros y signos de funciones. ¿Qué característica tiene la función $Y=\sqrt{X}$? Qué si X es negativa Y no existe, ya que (en el campo de los reales)[1] no existen las raices cuadradas de números negativos.
Continuidad de funciones. Los puntos donde la función no existe surge el concepto de continuidad de la función. Otros términos que tenemos que tener claros son: campo, definición, dominio y contradominio de funciones. También las funciones llamadas multiformes y los criterios de clasificación de funciones.

2.3. Límites, operaciones con límites, límites indeterminados, asíntotas. Otro concepto importante es el de límite (finito e infinito)

$$\lim_{x\to a} f(x)=h \qquad \forall\, \varepsilon>0\ \exists\ \delta\ /\ |f(x)<h|<\varepsilon\ ;\ 0<|x-a|<\delta$$

Asíntotas. Algunas veces las funciones tienden a un valor al cual nunca llegan, pero se aproximan bastante. Esos valores se llaman asíntotas.

2.4. Representación gráfica. Es bastante usual representar las funciones con una gráfica.

Naturales				
Cero	Enteros	Racionales	Reales	
Negativos				
	Quebrados			Complejos
		Irracionales		
			Imaginarios	

[1] Trabajaremos en R a no ser que digamos otra cosa.

CLASE 3
DERIVADAS

3.1. CONCEPTO.

3.1.1.Definiciones. *Cociente incremental* es la relación entre lo que aumenta y con lo que aumenta x. La *derivada* es el límite del cociente incremental cuando Δx tiende a 0:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y / \Delta x$$

3.1.2. Propiedades de la derivada.

1. ¿Creciente o decreciente? Cuando la función es creciente la derivada es positiva y cuando la función es decreciente la derivada es negativa.
2. Ingreso total, medio y marginal. Conceptos económicos relacionados con la derivada son los de ingresos total, medio y marginal. El ingreso marginal es la derivada de la función.

3.1.3.Símbolos.

3.2.CÁLCULO DE DERIVADAS. No es practico calcular las derivadas por medio de la definición. Hay muchas derivadas que son conocidas (de memoria) por la gente o se ve en los libros tablas con esas derivadas famosas.

Derivada de la constante **Derivada de la variable**
Derivada de la suma **Derivada del producto**
Derivada de la potencia Hay otras que merecen explicación. **Derivada del logaritmo**. La función f(x)=ln (x) tiene la particularidad de que su derivada es 1/x. **Derivada de la función exponencial**. La función f(x)=exp(x) es su propia derivada. **Derivada de una función de funciones**.

3.3. USOS DE LA DERIVADA. Los principales usos de la derivada son en la determinación de máximos y mínimos relativos de las funciones.
Ejemplo de aplicación: Máximo del Ingreso Total.

Derivada segunda. Si tomamos la derivada de la derivada tenemos la derivada segunda. Podemos seguir derivando y obtenemos las derivadas sucesivas.

3.4. ESTUDIO ANALITICO Y REPRESENTACION GRAFICA DE FUNCIONES.
Criterio de existencia de extremos. La derivada ayuda mucho en el Estudio Analítico y Representación Gráfica de funciones ya que permite identificar los puntos extremos. Normalmente el proceso es: - Estudiar las regiones de no existencia de la función, - los ceros y signos, - derivadas para determinar los puntos estacionarios. Algunas veces se necesita estudiar la derivada segunda para determinar si los puntos estacionarios son máximos o mínimos, *puntos de inflexión*; otras veces se determina por simple inspección.

Elasticidad de una función. Si y = f(x), podemos tomar el logaritmo de la función: ln y = ln f(x) y derivando tenemos: (ln y)´= (1/y) y. Si definimos la elasticidad de una función como el crecimiento relativo tenemos que es la derivada del logaritmo de la función.

Diferencial. Se define al diferencial como dy=y´Δx. Como para y=x el dx=Δx tenemos que dy=y´dx, lo que nos proporciona otra forma de expresar la derivada como cociente de diferenciales y´=dy/dx. El proceso de hallar el diferencial se conoce como diferenciación.

CLASE 4
POLINOMIOS

4.1.Forma General. Los polinomios son funciones de la forma general:

$$Y= b_0 + b_1X + b_2X^2 + ... + b_kX^k.$$

Los valores de b´s son los coeficientes de las potencias de la variable X.

- Grados de un polinomio. El grado de un polinomio es el grado del mayor de los términos.
- Algunos casos: Una constante puede ser considerada una función polinomial.
La función polinomial propiamente dicha más simple es la lineal $y=b_0+b_1X$, tambien representada como y=a+bx o entre los matemáticos como y=mx+n.
El polinomio de segundo grado es conocido como función cuadrática $Y= b_0 + b_1X + b_2X^2$.
El polinomio de tercer grado. $Y= b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$.

- Cocientes de polinomios. Los cocientes de polinomios no son polinomios como los podemos ver a través de un ejemplo.

4.2.Propiedades de los polinomios.

1. **Dominio real.** Los polinomios tienen dominio en todo el eje de los reales ya que no están afectados por cocientes, raices o logaritmos (excepto que nos limitemos intencionalmente a cierta parte de la recta).
2. **Continuidad.**
3. D**erivadas sucesivas.** Existen y además son también polinomios.

4.3.Ceros de los polinomios.
Ceros y raices. Los valores de x que anulan a la función son los ceros del polinomio o raices de la función.
Número de raices. Un polinomio de grado n tiene n raices, no necesariamente distintas.
Cuadráticas. Es muy conocida la fórmula de cálculo de las raices de la ecuación de segundo grado.
Factorización de polinomios.

4.4.Usos de los polinomios.
Los polinomios son muy utilizados por varias razones:

1. Fáciles de usar. Los polinomios son muy convenientes por su facilidad de uso.
2. Razones matemáticas. El teorema de Taylor nos asegura que toda función se puede aproximar por un polinomio.
3. Limitaciones. Los polinomios no son extrapolables. Son empíricos. O sea que si determinamos que la respuesta a la fertilización es lineal en un determinado rango no podemos pensar que esta respuesta seguirá siendo lineal fuera de ese rango. Si determinamos una respuesta polinomial generalmente no podemos explicar la función biológica de los coeficientes, excepto en casos simples, por ejemplo la recta donde *a* es rendimiento sin fertilizar y *b* es el aumento del producto por unidad de fertilización.

Ejemplos. Suelos y economía.

4.5. Funciones linearizables. Existen varias funciones que se pueden transformar en polinomios.

CLASE 5
FUNCIONES EXPONENCIALES

5.1. Funciones exponenciales.
La función exponencial es de mucha utilidad en biología, donde "exponencial" quiere decir "de crecimiento rápido". Pero esa no es la única caracteristica de las funciones exponenciales que tiene importancia.
La forma general de la función exponencial es $f(X)=b_0e^{b1X}$ con $b_0>0$ / $a\leq x\leq b$
Otra forma es $f(X)=kr^X$
Ceros, signo y corte con oy. Existe para todo x, no se anula nunca y corta al eje oy en el punto
Además de la importancia que el exponencial tiene, hay variantes de ellas que son muy importantes a su vez. Las funciones exponenciales más famosas son la logística, la de Mischerlich, y la normal o de Gauss.

5.2. Logística o sismoide. La función logística es de la forma:
$f(X)=b_0/1+b_1e^{-b_2X}$ con b_0, b_1, $b_2>0$ y / $a\leq x\leq b$
Algunas de sus características son: ramas infinitas y asintotas, crecimiento.
La función logística es muy utilizada para describir crecimiento de aminales y plantas.

5.3. Mitscherlich- Spillman. La función de Mitscherlich es de la forma:
$f(X)=b_0(1-b_1e^{-b_2X})$ con b_0, b_1, $b_2>0$ y / $a\leq x\leq b$
La función de Mitscherlich se usa en estudios de fertilización.

5.4. Normal. Una función muy importante a los efectos de estadística es la normal o función de Gauss.

CLASE 6
FUNCIONES MULTIVARIANTES

6.1.Funciones de dos variables.
6.1.1. Derivadas parciales. A los efectos de calcular la derivada con respecto a x_1,x_2 es como si fuese una constante.
Tenenos entonces: $Y=b_0+b_1N+b_2P$
6.1.2. Puntos estacionarios, máximos y mínimos relativos. Cuando trabajamos con una sola variable teníamos dos posibilidades: o el punto estacionario era un máximo o un mínimo[2] . Ahora tenemos tres posibilidades: es un máximo para cada variable, es un mínimo para ambas variables o es máximo a efectos de una variable y mínimo a efectos de otra variable. A esta última situación se le llama “puntos de silla”.
6.1.3. Hessiano y Jacobiano. Para ayudar a determinar si un punto estacionario es máximo, mínimo, o punto de silla son de utilidad el Hessiano y el Jacobiano.
Hessiano es el vector de las derivadas parciales con respecto a cada variable:
Jacobiano. Es el determinante de la matriz de las derivadas segundas. En la primera fila estan las derivadas segunda respecto de x_1 y respecto de x_2, en la segunda fila lo mismo. O sea:

6.2. Otras funciones de varias variables.

Funciones con interacción , $Y=b_0+b_1N+b_2P+b_3NP$
Funciones cuadráticas, $Y=b_0+b_1N+b_2N^2+b_3P+b_4P^2+b_5NP$

6.3. Multivariantes no polinómicas.
6.3.1. Mitschelich. La función de Mitschelich generalizada, también llamada la función de Baule, es de la forma:
6.3.2. Cobb-Douglas. Los economistas llaman Cobb-Douglas a las funciones potenciales, o sea funciones donde la variable esta elevada a alguna potencia.
6.3.3. Polinomio con raiz cuadrada. Algunas veces se unan con éxito polinomios en función con la raiz cuadrada de x. El principal efecto obtenido es lograr asimetría.
6.3.4. Otras funciones.

6.4. Conceptos económicos.
Vinculados al estudio de las funciones de varias variables tenemos conceptos económicos. O sea, los agronómos usan estos conceptos en estudios económicos.
- Optimo fisico o económico.
- Relaciones insumo-producto e insumo-imsumo (isocuantas).
- Producto marginal y producto medio.

2. Dejamos de lado casos donde la derivada de anula y el signo no cambia.

CLASE 7
INTEGRALES

7.1. Derivadas y Primitivas.

7.1.1. Definición. Si F(x)´= f(x) entonces f(x) es la derivada de F(x) y F(x) es la primitiva de f(x). La función primitiva es también llamada antiderivada de f(x) o integral.

Ejemplo: Si la derivada de x^2 es 2x ,por lo tanto, x^2 es la primitiva de 2x.

Así como derivación es el proceso de encontrar la derivada, integración es el proceso de encontrar las primitivas de la función.

Integración es igual a hallar las funciones de las cuales f(x) es derivada.

La primitiva de una función no es única. Cualquier función que difiera en una constante tambien es primitiva de la función.

Si bien x^2 es primitiva de 2x tambien x^2+5 es primitiva de 2x, y en general x^2+c (c es constante) es primitiva de 2x.

7.1.2. Diferencial. Definimos el diferencial de y =f(x) como dy=y´Δx.

El diferencial de y=x es dx=Δx . Por lo tanto dy=y´dx y de ahí despejamos:

y´= dy/dx, que es otra expresión para la derivada de y con respecto a x.

7.2.Métodos de integración.

Existen diferentes métodos de integración:

- El mas sencillo es el método directo o inmediato, otro es
- Descomposición Constante fuera

  Integral de una suma a suma de las integrales
- Método de sustitución
- Método de integración por partes

7.3. Integral definida y calculo de áreas

7.4. Observaciones.

CLASE 8
ECUACIONES DIFERENCIALES

8.1. Conceptos básicos.
8.2. Ecuaciones diferenciales de primer orden.
8.3. Algunos modelos de interés agronómico.

LABORATORIO 7. INTEGRALES.

1. Si f(x) es la derivada de g(x), entonces g(x) es la .... de f(x).
2. La derivada de $f(x) = x^2$ es g(x)=2x es la .... de f(x).
3. La primitiva se llama también......................o............................
4. Cuántas primitivas tiene una función? Qué relación hay entre ellas?
5. Así como derivar una función es hallar su derivada, integrar una función es ....
6. Qué es el diferencial de una función?
7. A qué es igual el diferencial de la variable independiente?
8. Cómo se escribe la derivada de una función en términos de los diferenciales?
9. Proporcione tres definiciones diferentes (pero equivalentes) de derivada.
10. Cuando estamos obligados a usar la definición dada en (8)?
11. Qué es   f(x)d(x)?
12. La frase:"F(x)=   f(x)d(x) se lee F(x) es una función cuyo diferencial es f(x)d(x)", es correcta o falsa?

AREA BAJO LA CURVA. Supongamos que tenemos una curva dada por la función f(x). El área bajo la curva puede ser aproximada por defecto o por exceso a través de las siguientes funciones: $A_i<A<A_s$.
El área bajo la curva es $A=\lim\sum f(x_i)\Delta x_i$ cuando $n\to\infty$ o sea $\Delta\, x_i\to\infty$
Teorema. El área bajo una curva f(x) entre los puntos a y b, está dada por la integral entre los puntos a y b.
Este teorema se le dice a veces *Teorema fundamental del cálculo integral*, es una forma de la Regla de Barrow.
Demostración: dA/dx=f(x)

Definicion de limite

Limite en un punto. Decimos que el limite de $f(x)$ es **b** cuando x tiende a **a** cuando
Dado un ε existe un δ tal que
Si $x\text{-}a < \delta$ entonces
$|fx\text{-}b| < \varepsilon$

Limites infinitos. Decimos que el limite de $f(x)$ es **b** cuando x tiende a ∞ si dado un m (tan grande como se quiera) existe un δ tal que para todo $x>m$ entonces $|f(x)-b| < \delta$.

Decimos que el limite de $f(x)$ es ∞ cuando x tiende a **a** si dado un **k** (tan grande como se quiera) existe un δ tal que si $|x\text{-}a| < \delta$ entonces $|f(x)| > k$.

Decimos que el limite de $f(x)$ es ∞ cuando x tiende a ∞ si dado un **k** existe un **m** tal que $x > m$ entonces $f(x) > k$.

Definicion de derivada
Concepto de derivada Es una medida de la velocidad del crecimiento de una funcion.

1) *La derivada como el limite del cociente incremental*. La derivada puede verse como el límite del cociente incremental cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero.
Ejemplo. El estudio de la velocidad instantanea (en un tiempo cero) de un auto o el crecimiento de un animal. Si yo peso todos los meses un animal puedo obtener el crecimiento mensual, si lo peso todas las semanas, el crecimiento semanal, si lo peso todos los dias, el crecimiento diario, y si lo peso cada segundo? Cda decima de segundo? Cada milésima? La derivada!

2) *Derivada de la funcion en un punto (a)*: es el límite del cociente **f(X)** menos **f(a)** dividido **x** menos **a**, cuando **x** tiende a **a.**
Esta definición enfatiza la referencia con respecto a un punto. En cada punto la derivada tiene un valor diferente.

3)*Funcion derivada*: Si como decimos anteriormente la derivada tiene valores diferentes, dichos valores dependen en general de **x**. f´(x) es una nueva funcion de **x**, que se llama funcion derivada.

Otras cosas.
1. Derivar una función es demostrar que f es derivable en tal punto y que su limite es finito.

2. Motivo por el cual la derivada no existe a veces, es como dice Julie que el limite del cociente incremental no existe (o sea que no es finito).

3. La derivada se representa de diferentes formas: con un apostrofe F´(a)o y´, como Df(x). Mas adelante veremos otra forma dY/dX

Derivada de una potencia: es multiplicar al coeficiente por **x** y restarle **1** al exponente.
Ejemplo. X elevado a 2 es igual a 2x.

Objeto	Altura del que mide	Distancia	Angulo	Altura del objeto
columna	1,43 m (Ana)	7,8 m	44	
palmera	1,62 m (Mirian)	6,34 m	75	
alt.edificio	1,55 m (Verónica)	9,78 m	44	
pino	1,68 m (Julia)	15,61 m	41	
alt.ef total	1,62 m (Patricia)	9,78 m	53	
columna ef	1.63 m (Mario)	10,08 m	20	
árbol	1,43 m (Ana)	4,47 m	35	
estufa	1.43 m	1,59 m	29	
palmera	1,43 m	22,35 m	40	